دانشگاه تهران
دانشکدگان فنی
دانشکده مهندسی نقشه برداری و اطلاعات مکانی

گزارش پروژه اول درس ژئودزی هندسی

دوره کارشناسی–سال تحصیلی 1401–1400

بررسی شکل هندسی زمین با استفاده از مشاهدات شتاب ثقل

دانشجـــــویان:

محمد سلمانی

شماره دانشجویی: 810398083

گلسا طالبی

شماره دانشجویی: 810398090

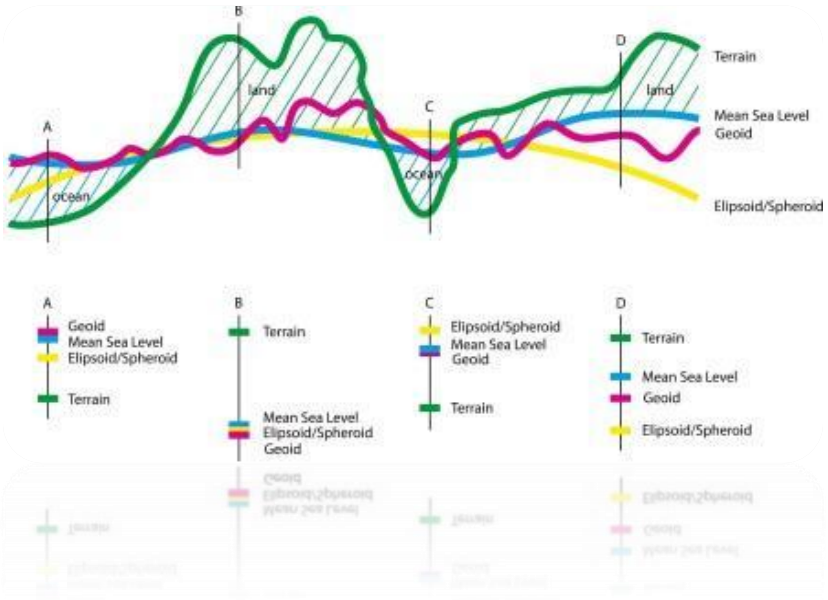
یاسمن بوستانی

شماره دانشجویی: 810398070

اردیبهشت ماه 1401

مقدمه

هدف از این تمرین بررسی شکل کره زمین با استفاده از مشاهدات شتاب ثقل است. شکل واقعی و فیزیکی زمین، شکل سطح اقیانوسها تحت اثر نیروی جاذبه زمین و نیروی گریز از مرکز است؛ این سطح تعریف شده، یک سطح هم پتانسیل است که به آن ژئوئید میگویند. این سطح به دلیل توزیع ناهمگون جرم درون زمین و بر روی سطح آن، یک سطح پیچیده و نامنظم است به طوری که در نگاه اول می‌توان زمین را کره‌ای به شعاع متوسط 6371 کیلومتر در نظر گرفت. ولی می‌دانیم که کرویت زمین کامل نیست، بلکه زمین در قطبین کمی فرورفتگی دارد. بطوری که شعاع استوائی آن 6378 کیلومتر و شعاع قطبی آن 6356 کیلومتر است.



در قسمت نخست با فرض کروی بودن زمین و به وسیله مشاهدات 12 ایستگاه، شعاع زمین را در این 12 نقطه برآورد میکنیم. با توجه به این فرض، انتظار داریم شعاع در همه نقاط برابر شود اما نتیجه ای خلاف آن میگیریم. طبق عرضهای جغرافیایی ایستگاهها هرچه به عرض کمتر نزدیک میشویم، شعاع زمین افزایش مییابد. (به دلیل شکل بیضوی زمین و نیروی گریز از مرکز). در قسمت دوم، شتاب ثقل از رابطهای دیگر محاسبه میشود و در اینجا دو مجهول داریم: r و a_{20}.

سپس به بررسی روابط میدان پتانسیل ثقل با در نظر گرفتن فرضیات مختلف در مورد شکل زمین میپردازیم.

توضیح کد نوشته شده

میدانیم نیروی ثقل از جمع دو نیروی جاذبه و گریز از مرکز به دست می آید. از رابطه داده شده برای پتانسیل میدان جاذبه، نسبت به λ , ϕ, r گرادیان میگیریم.

به منظور گرادیان گیری از رابطه میدان پتانسیل بر حسب مولفه های کارتزین، از رابطه زیر استفاده میکنیم :

$$\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin v \cos\lambda & \dfrac{-\cos v \cos\lambda}{r} & \dfrac{-\sin\lambda}{r \sin v} \\ \sin v \sin\lambda & \dfrac{-\cos v \sin\lambda}{r} & \dfrac{\cos\lambda}{r \sin v} \\ \cos v & \dfrac{\sin v}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ \dfrac{\partial V}{\partial v} \\ \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \end{bmatrix}$$

پس از گرادیان گیری به رابطه ای برحسب λ , ϕ, r می رسیم. حال مقادیر ϕ و λ را با استفاده از تابع subs در رابطه جایگذاری میکنیم تا رابطه شتاب ثقل بر حسب r به دست آید. در نهایت اندازه این بردار را محاسبه میکنیم. سپس برای حل معادله به دست آمده، از روش کمترین مربعات غیرخطی استفاده میکنیم. به منظور این کار از روابط $\delta X = (A^T A)^{-1} A^T L$ و $\delta L = L - L_0$ استفاده میکنیم.

در رابطه کمترین مربعات غیر خطی تکرار محاسبات را تا جایی انجام میدهیم که دقت برآورد مجهولات به 10^{-8} برسد.

این روند را یکبار برای حالت کروی با مجهول R انجام میدهیم، و بار دیگر برای حالت بیضوی برای مجهولات R و j_2 تکرار میکنیم.

سپس تمامی مجهولات به دست آمده را با استفاده از دستورات plot و یا Scatter رسم میکنیم.

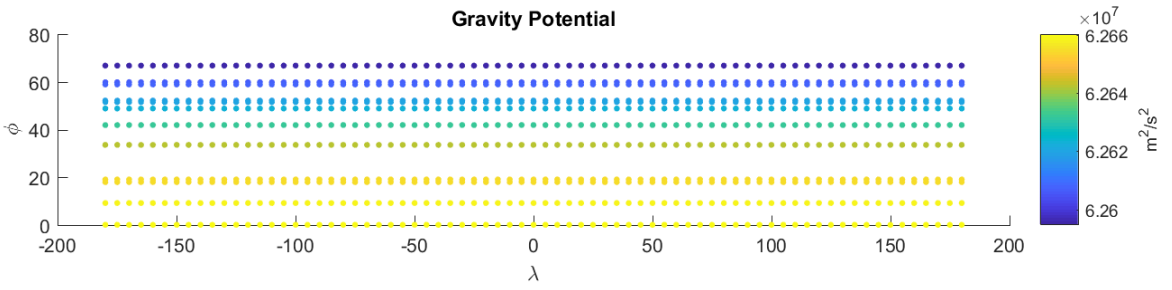
سوالات

1. در محاسبهٔ مؤلفه‌های بردار شتاب ثقل در سیستم مختصات کروی از طریق گرادیان گیری، انتظار دارید که کدام مؤلفه مقدار بزرگتری داشته باشد؟ جواب خود را با بررسی مقادیر این مؤلفه‌ها ارزیابی کنید.

از آنجایی که شتاب ثقل برآیند دو نیروی گریز از مرکز و شتاب جاذبه است و شتاب جاذبه صرفا در راستای محور z بر جسم ساکن وارد میشود در نتیجه پس از گرادیان گیری در سیستم مختصات کروی مولفه ای که در این راستاست یعنی g_z انتظار میرود بیشترین مقدار را داشته باشد.

2. در محاسبات گرادیان، آیا نیاز به دانستن طول ایستگاه اندازه گیری است؟ اگر این مقدار معلوم نباشد چه مقداری باید برای آن در نظر گرفته شود؟

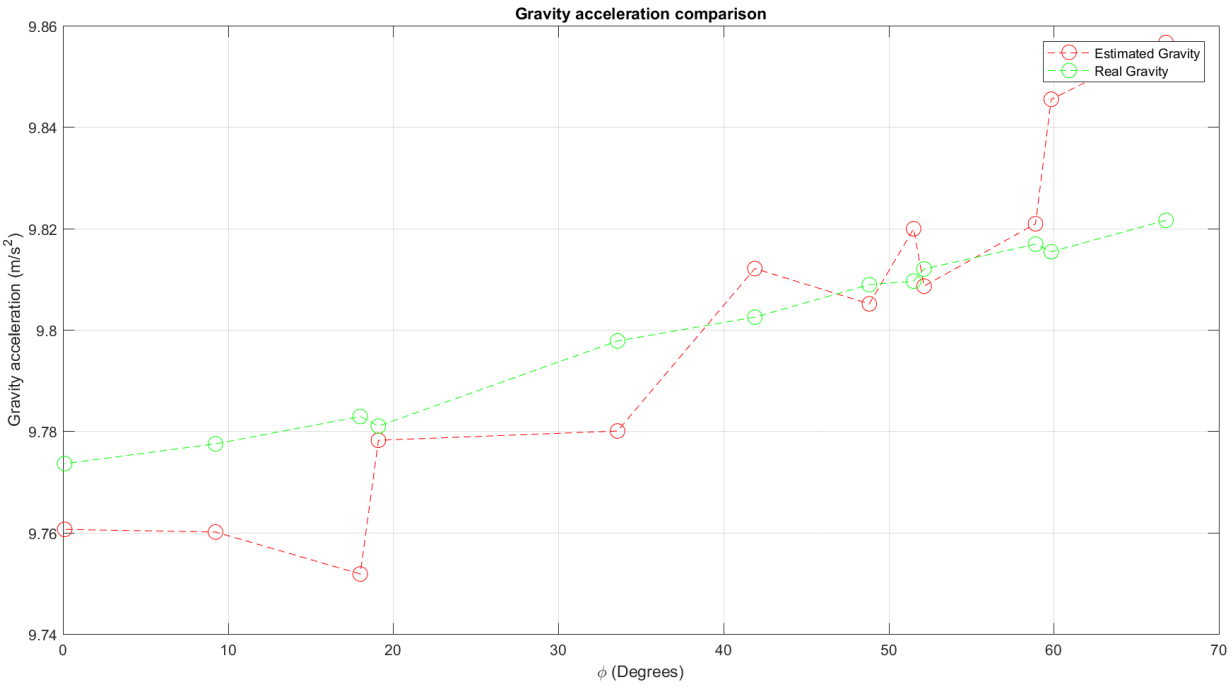
نیازی به دانستن طول جغرافیایی یعنی λنیست زیرا با توجه به نمودار زیر، شتاب ثقل کل در λ های مختلف مقدار ثابتی دارد و فقط در ϕهای مختلف مقدارش تغییر میکند و وابسته به آن است. در نتیجه میتوان هر مقداری بین 180- تا 180+ برای λ اتخاذ کنیم.



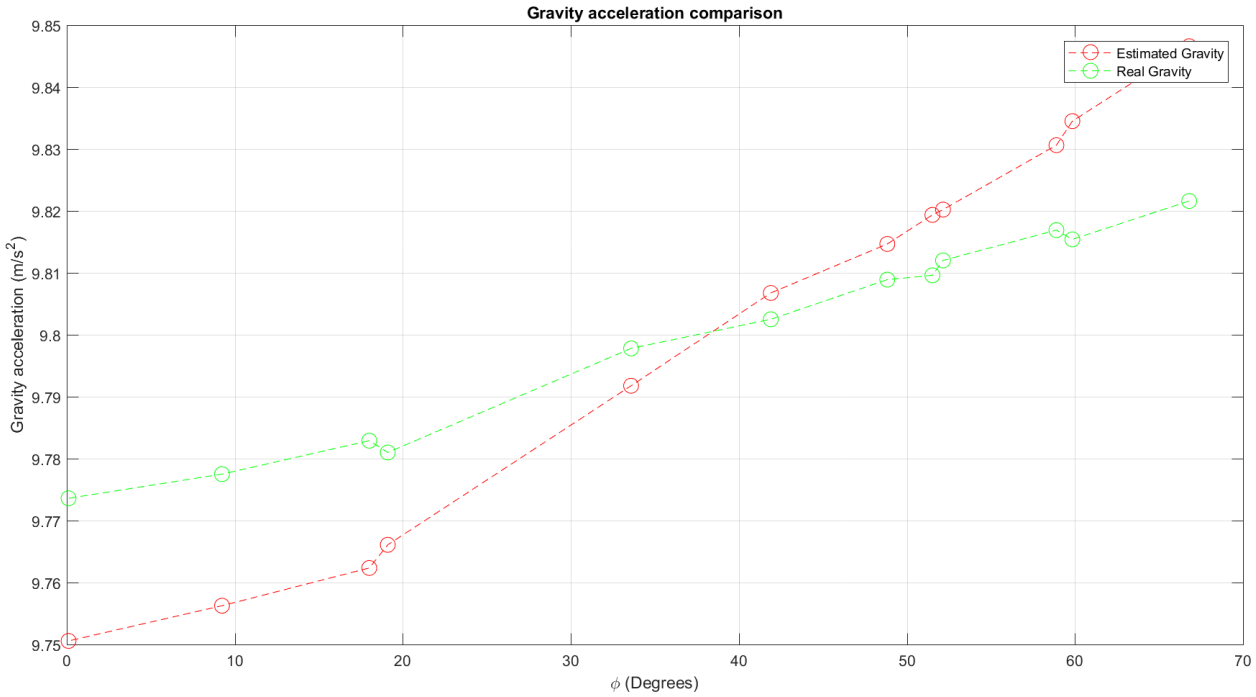
3. پس از برآورد مجهولات در دو حالت، مشاهدات برآورد شده و مشاهدات واقعی را به صورت همزمان در یک گراف ترسیم کنید. کدام حالت برازش بهتری به مشاهدات دارد؟ شعاع کره در دو حالت را مقایسه و اختلاف را تحلیل کنید.

برای پاسخ به این بخش از سوالات، در ابتدا مشاهدات واقعی که در ستون سوم فایل Data داده شده بود و به عنوان شتاب ثقل شناخته میشد را میبایست با مشاهدات برآورده شده مقایسه کنیم. به این منظور دوباره داخل تابع گرادیان گیری شده، شعاع به دست آمده را قرار میدهیم.

در نهایت بردار مربوط به مشاهدات برآورد شده شتاب ثقل به دست میاید. با رسم این مشاهدات در کنار مشاهدات واقعی به نتایج زیر برای دو حالت کروی و بیضوی میرسیم.

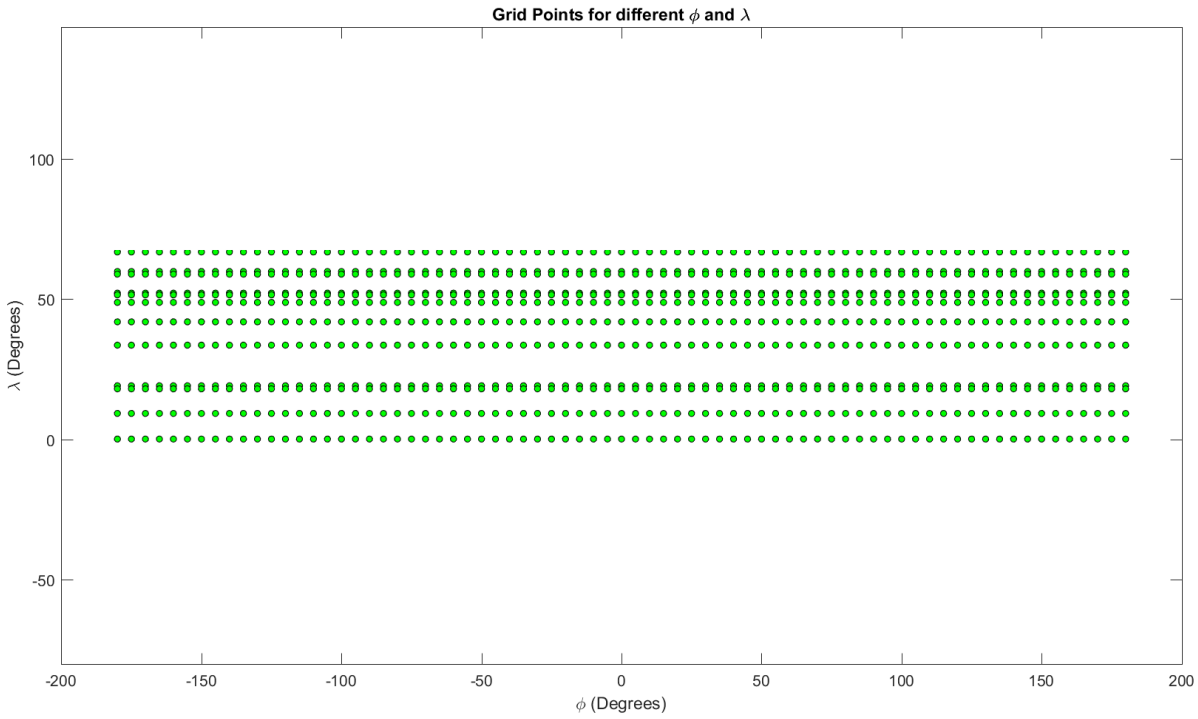


مقایسه مشاهدات شتاب ثقل با بردار شتاب ثقل برآورد شده در حالت کروی



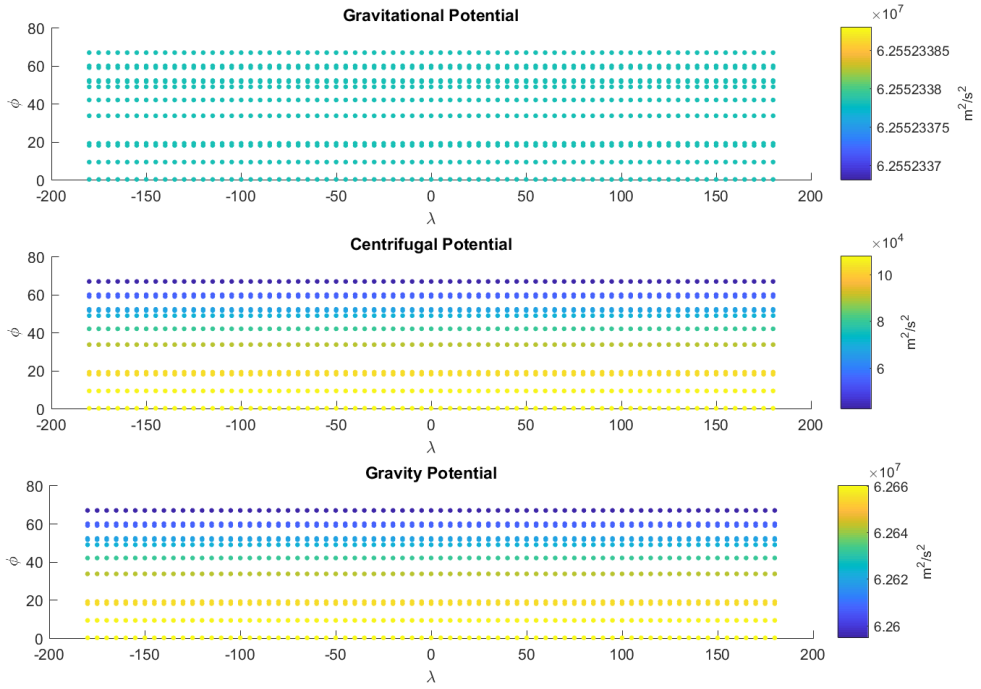
مقایسه مشاهدات شتاب ثقل با بردار شتاب ثقل برآورد شده در حالت بیضوی

در مرحله بعدی باید یک سطح از ϕ و λ های داده شده بسازیم. برای اینکار از تابع meshgrid استفاده میکنیم. برای ساخت سطح از ϕ داده شده در داده ها استفاده میکنیم و برای محور λ از اعداد $-180°$ تا 180 درجه استفاده میکنیم. در نهایت مش ساخته شده برای هر دو حالت کروی و بیضوی به شکل زیر است.

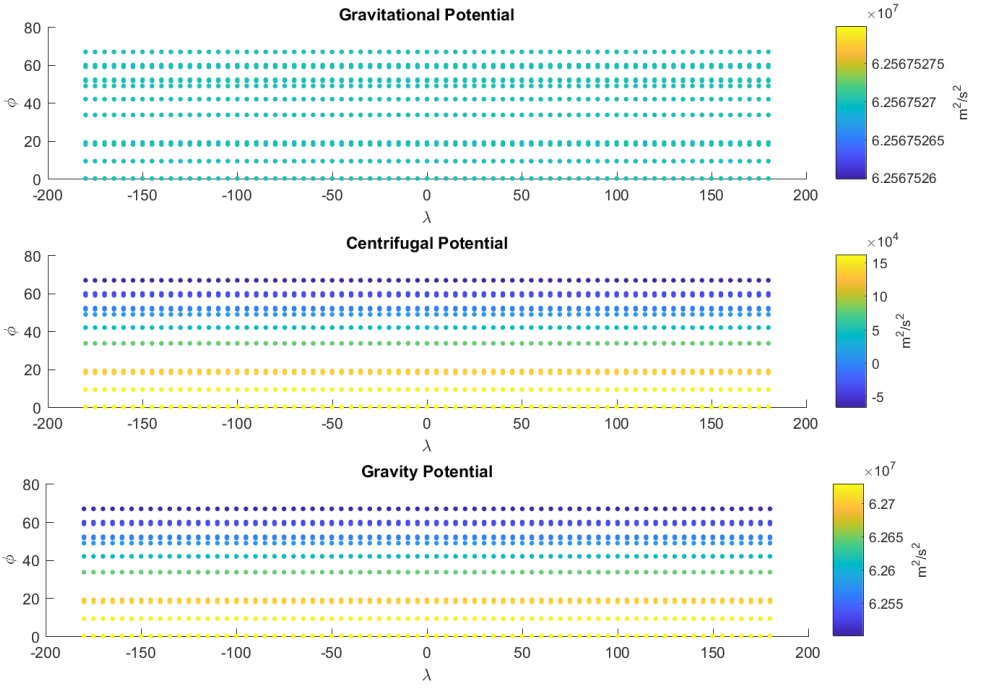


سطح ساخته شده در حالت بیضوی و کروی

حالا با استفاده از سطح ساخته شده، به مقایسه مقادیر پتانسیل جاذبه، پتانسیل گریز از مرکز و در نهایت پتانسیل ثقل میپردازیم.



مقایسه پتانسیل جاذبه، پتانسیل گریز از مرکز و پتانسیل ثقل در حالت کروی

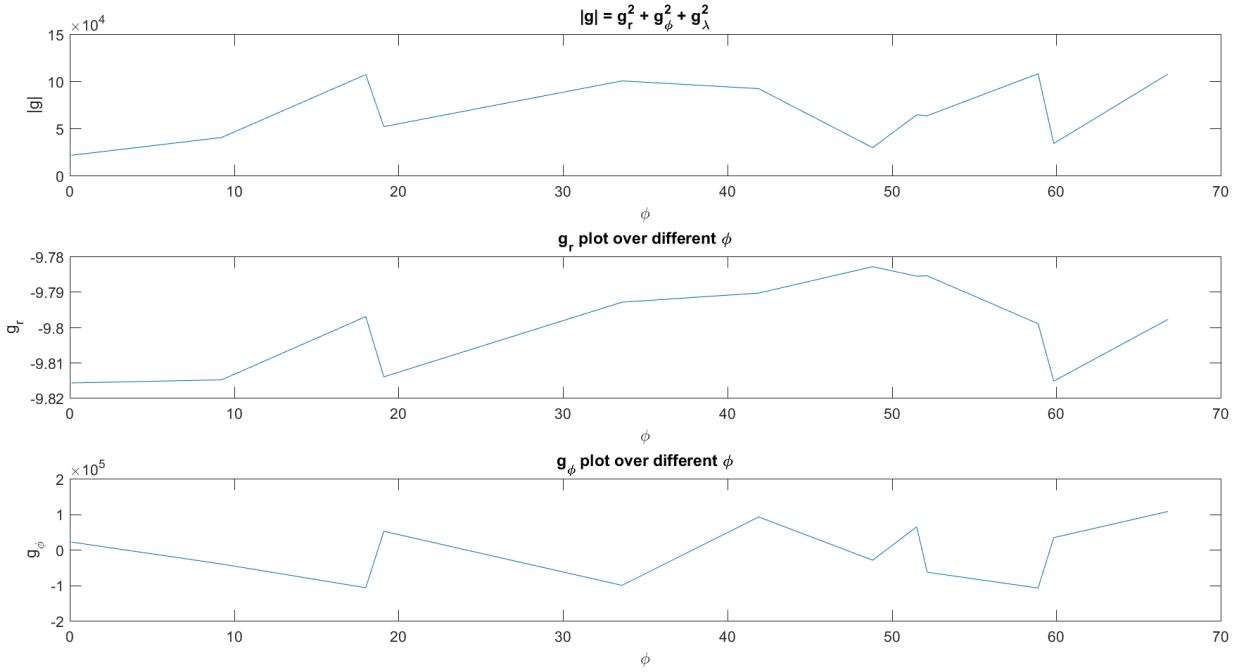


مقایسه پتانسیل جاذبه، پتانسیل گریز از مرکز و پتانسیل ثقل در حالت بیضوی

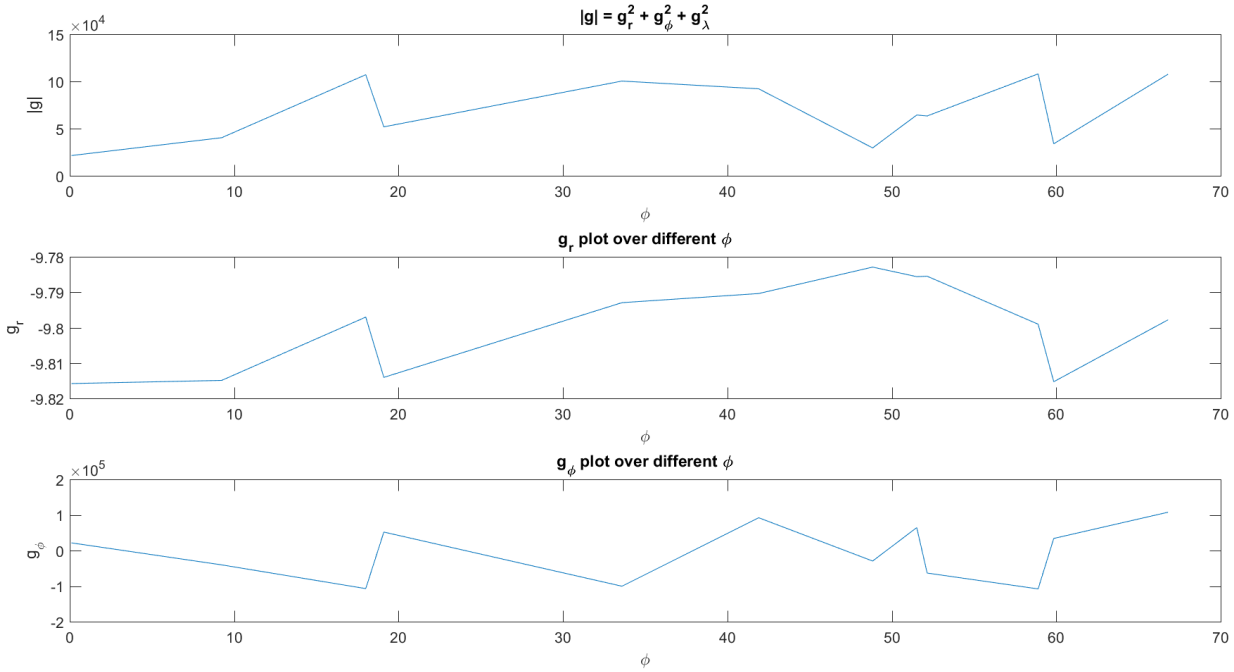
در مرحله بعدی، اقدام به محاسبه مولفه های شتاب ثقل میکنیم. شتاب ثقل از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$|g| = \sqrt{g_{\phi}^2 + g_r^2 + g_{\lambda}^2}$$

اگر از شتاب ثقل بر حسب مولفه های قطبی گرادیان گیری کنیم، مشاهده میشود که مشتق شتاب بر حسب مولفه λ برابر صفر است. در ادامه گراف مربوط به اندازه شتاب ثقل، اندازه مولفه شتاب ثقل در راستای r و اندازه مشتق شتاب ثقل بر ϕ رسم شده است.

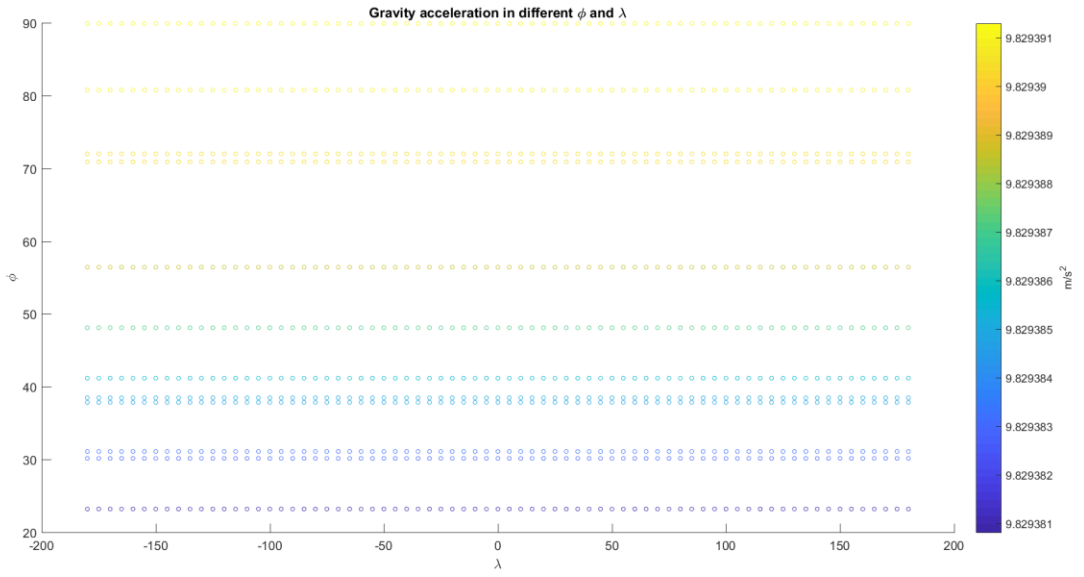


اندازه مولفه های شتاب ثقل در حالت کروی

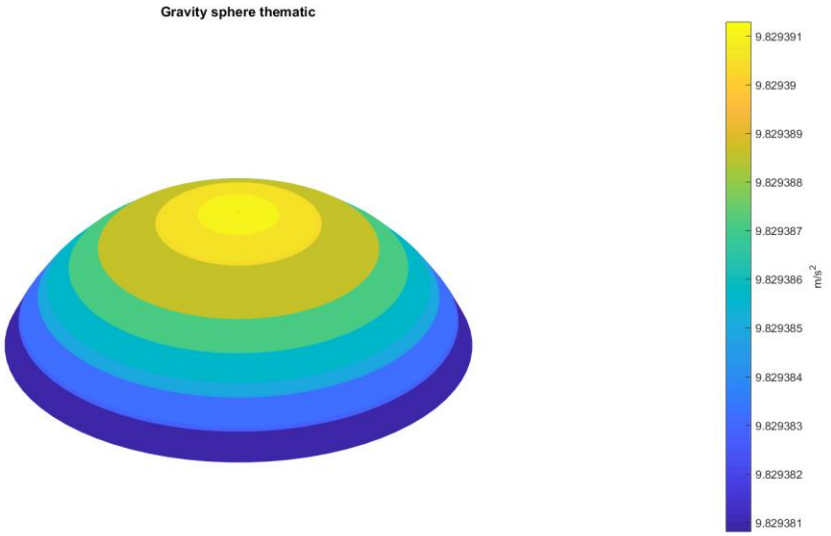


اندازه مولفه های شتاب ثقل در حالت بیضوی

در نمودار بعدی، تغییرات شتاب جاذبه را بر حسب ϕ, λ های مختلف نمـایش داده شـد. در نمـودار بعـدی نیـز، شماتیک شتاب جاذبه را با نمایش رنگی روی کره مشخص شد.



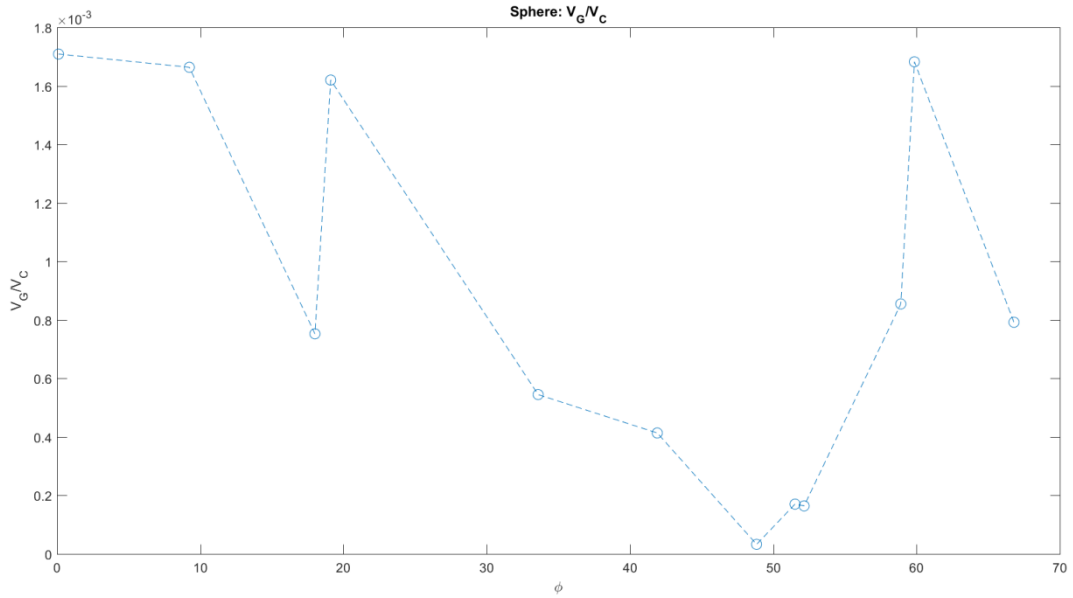
اندازه مولفه های شتاب جاذبه در حالت بیضوی



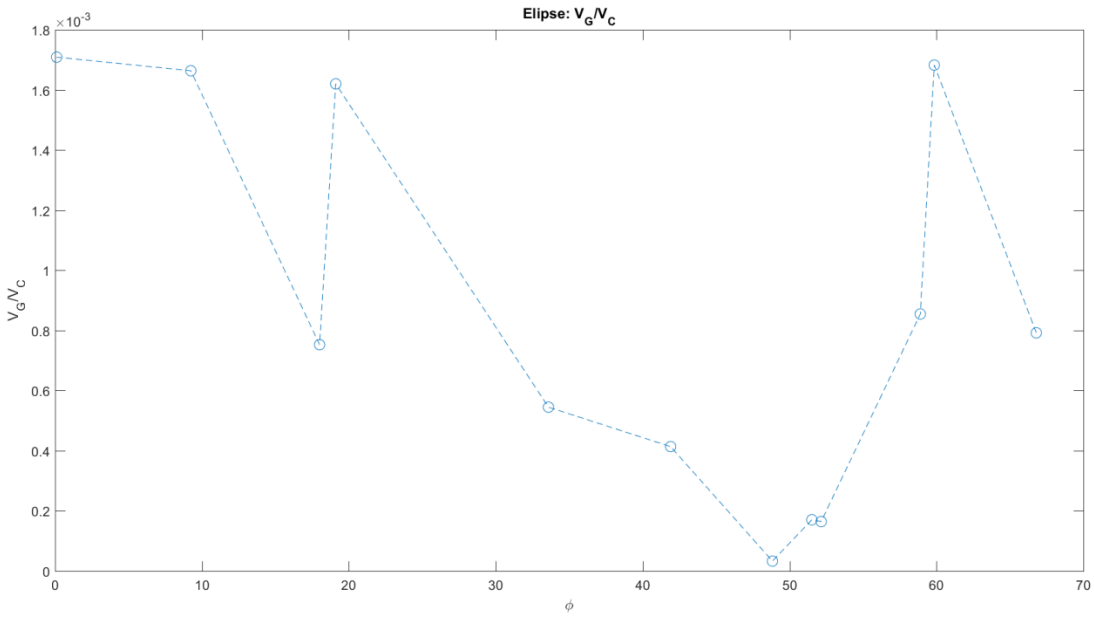
همانطور که مشاهده میشود، شتاب جاذبه رفته رفته با نزدیک شدن به قطب های زمین، بیشتر میشود. ایـن اثـر به دلیل کم تر بودن شعاع زمین و به اصطلاح فشردگی زمین در قطبین است.

4. پس از برآورد مجهولات در حالت اول و دوم، بررسی کنید ترم مربـوط بـه شـتاب گریـز از مرکـز نسبت به شتاب جاذبه چه سهمی دارد؟

در این قسمت از سوال برای دو حالت کروی و بیضوی نسبت شتاب جاذبه به شتاب گریـز از مرکـز را بـه دسـت میاوریم. برای این کار از شعاع به دست آمده برای کره و بیضوی در هر سوال استفاده میکنیم. در نهایـت مقـادیر به دست آمده برای هر دو حالت را در نمودار های زیر نمایش میدهیم.



نسبت پتانسیل گریز از مرکز به پتانسیل جاذبه در حالت کروی



نسبت پتانسیل گریز از مرکز به پتانسیل جاذبه در حالت بیضوی